

## Exponenciális és logaritmusos feladatok

- 1) Oldja meg az alábbi egyenleteket!
- a)  $\log_3(\sqrt{x+1}+1)=2$ , ahol  $x$  valós szám és  $x > -1$  (6 pont)
- b)  $2\cos^2 x = 4 - 5\sin x$ , ahol  $x$  tetszőleges forgásszöget jelöl (11 pont)
- 2) Mekkora  $x$  értéke, ha  $\lg x = \lg 3 + \lg 25$ ? (2 pont)
- 3) Oldja meg a következő egyenleteket:
- a)  $9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$  (6 pont)
- b)  $\sin^2 x = 2\sin x + 3$  (6 pont)
- 4) Adott a következő egyenletrendszer:
- (1)  $2\lg(y+1) = \lg(x+11)$
- (2)  $y = 2x$
- a) Ábrázolja derékszögű koordináta-rendszerben azokat a  $P(x; y)$  pontokat, amelyeknek koordinátái kielégítik a (2) egyenletet! (2 pont)
- b) Milyen  $x$ , illetve  $y$  valós számokra értelmezhető mindkét egyenlet? (2 pont)
- c) Oldja meg az egyenletrendszert a valós számpárok halmazán! (11 pont)
- d) Jelölje meg az egyenletrendszer megoldáshalmazát az a) kérdéshez használt derékszögű koordináta-rendszerben! (2 pont)
- 5) Oldja meg a pozitív valós számok halmazán a  $\log_{16} x = -\frac{1}{2}$  egyenletet! Jelölje a megadott számegyenesen az egyenlet megoldását! (3 pont)
- 6) Melyik a nagyobb:  $A = \frac{\sin 7\pi}{2}$  vagy  $B = \log_2 \frac{1}{4}$ ? (Írja a megfelelő relációs jelet a válaszmezőbe! Válaszát indokolja!) (2 pont)
- 7) Adja meg a  $\lg x^2 = 2\lg x$  egyenlet megoldáshalmazát! (2 pont)
- 8)
- a) Mely pozitív egész számokra igaz a következő egyenlőtlenség?  
 $5^{x-2} < 5^{13-2x}$  (4 pont)
- b) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!  
 $9^{\sqrt{x}} < 3^{x-3}$  (8 pont)
- 9) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!
- a)  $\lg(x+15)^2 - \lg(3x+5) = \lg 20$  (6 pont)
- b)  $25^{\sqrt{x}} < 5 \cdot 5^{3\sqrt{x}}$  (6 pont)
- 10) Határozza meg az alábbi egyenletek valós megoldásait!
- a)  $(\log_2 x - 3) \cdot (\log_2 x^2 + 6) = 0$  (7 pont)
- b)  $\sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}$  (10 pont)
- 11) Adja meg a  $\log_3 81$  kifejezés pontos értékét! (2 pont)
- 12) Mennyi az  $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x}$  kifejezés értéke, ha  $x = -1$ ? (2 pont)

13) Az  $a$ ,  $b$  és  $c$  tetszőleges pozitív valós számokat jelölnek. Tudjuk, hogy

$$\lg x = 3 \lg a - \lg b + \frac{1}{2} \lg c$$

Válassza ki, hogy melyik kifejezés adja meg helyesen  $x$  értékét! (3 pont)

A:  $x = \frac{3a}{b} + \frac{1}{2}c$

E:  $x = a^3 - b\sqrt{c}$

B:  $x = a^3 - b + \sqrt{c}$

F:  $x = \frac{a^3 \cdot \sqrt{c}}{b}$

C:  $x = \frac{a^3}{b \cdot \sqrt{c}}$

G:  $x = \frac{a^3 \cdot \frac{1}{c}}{b}$

D:  $x = \frac{a^3 \cdot c^{-1}}{b}$

14) A  $b$ ,  $c$  és  $d$  pozitív számokat jelölnek. Tudjuk, hogy  $\lg b = \frac{\lg c - \lg d}{3}$ .

Fejezze ki az egyenlőségből  $b$ -t úgy, hogy abban  $c$  és  $d$  logaritmusai ne szerepeljen! (2 pont)

15) Melyik szám nagyobb?

$A = \lg \frac{1}{10}$ , vagy  $B = \cos 8\pi$  (2 pont)

16) István az  $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}} x (x > 0)$  függvény grafikonját akarta

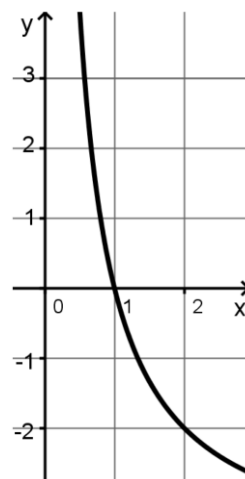
felvázolni, de ez nem sikerült neki, több hibát is elkövetett (a hibás vázlat látható a mellékelt ábrán).

Döntse el, hogy melyik igaz az alábbi állítások közül!

a) István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény szigorúan monoton csökkenő.

b) István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény 2-höz -2-t rendel.

c) István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény zérushelye 1. (2 pont)



17) Adja meg azokat az  $x$  valós számokat, melyekre teljesül:

$\log_2 x^2 = 4$ . Válaszát indokolja! (3 pont)

18) Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a)  $5^{x+1} + 5^{x+2} = 30$  (5 pont)

b)  $\frac{3}{x} - \frac{2}{x+2}$ , ahol  $x \neq 0$  és  $x \neq -2$  (7 pont)

19)

a) Oldja meg a valós számok halmazán az  $\frac{x+2}{3-x} \geq 0$  egyenlőtlenséget! (7 pont)

b) Adja meg az  $x$  négy tizedesjegyre kerekített értékét, ha  $4 \cdot 3^x + 3^x = 20$ . (4 pont)

c) Oldja meg a  $2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0$  egyenletet a  $[-\pi; \pi]$  alaphalmazon. (6 pont)

20) Melyik az az  $x$  természetes szám, amelyre  $\log_3 81 = x$ ? (2 pont)

21) Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

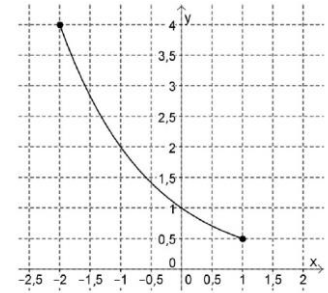
a)  $\frac{x-1}{2} + \frac{2x}{5} = 4$  (5 pont)

b)  $\lg(x-1) + \lg 4 = 2$  (7 pont)

22) Az ábrán az  $f: [-2; 1] \Rightarrow \mathbb{R}; f(x) = a^x$  függvény grafikonja látható. (3 pont)

a) Adja meg az  $f$  függvény értékkészletét!

b) Határozza meg az  $a$  szám értékét!



23) Adja meg az  $x$  értékét, ha  $\log_2(x+1) = 5$ !

(2 pont)

24) Újsághír: „Szeizmológusok számításai alapján a 2004. december 26-án Szumátra szigetének közelében kipattant földrengés a Richter-skála szerint 9,3-es erősségű volt; a rengést követő cunami (szökőár) halálos áldozatainak száma megközelítette a 300 ezret.”

A földrengés Richter-skála szerinti „erőssége” és a rengés középpontjában felszabaduló energia között fennálló

$$\text{összefüggés: } M = -4,42 + \frac{2}{3} \lg E.$$

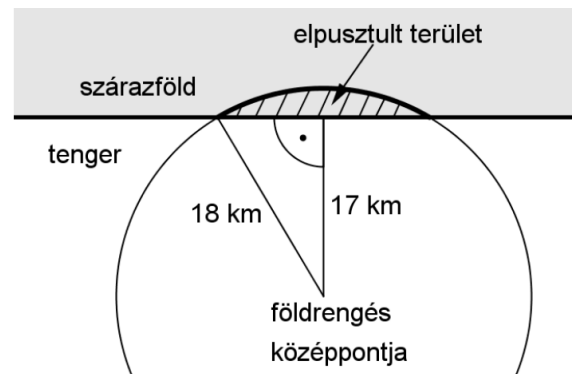
Ebben a képletben  $E$  a földrengés középpontjában felszabaduló energia mérőszáma (joule-ban mérve),  $M$  pedig a földrengés erősségét megadó nem negatív szám a Richter-skálán.

a) A Nagasakira 1945-ben ledobott atombomba felrobbanásakor felszabaduló energia  $1,344 \cdot 10^{14}$  joule volt. A Richter-skála szerint mekkora erősségű az a földrengés, amelynek középpontjában ekkora energia szabadul fel? (3 pont)

b) A 2004. december 26-i szumátrai földrengésben mekkora volt a felszabadult energia? (3 pont)

c) A 2007-es chilei nagy földrengés erőssége a Richter-skála szerint 2-vel nagyobb volt, mint annak a kanadai földrengésnek az erőssége, amely ugyanebben az évben következett be. Hányszor akkora energia szabadult fel a chilei földrengésben, mint a kanadaiban? (5 pont)

d) Az óceánban fekvő egyik szigeten a földrengést követően kialakuló szökőár egy körszelet alakú részt tarolt le. A körszeletet határoló körív középpontja a rengés középpontja, sugara pedig 18 km. A rengés középpontja a sziget partjától 17 km távolságban volt (lásd a felülnézeti ábrán). Mekkora a szárazföldön elpusztult rész területe egész négyzetkilométerre kerekítve? (6 pont)



25)

a) Mely valós számokra értelmezhető a  $\log_2(3-x)$  kifejezés? (1 pont)

b) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$\log_2(3-x) = 0$$

(2 pont)

26) Egy idén megjelent iparági előrejelzés szerint egy bizonyos alkatrész iránti kereslet az elkövetkező években emelkedni fog, minden évben az előző évi kereslet 6%-ával. (A kereslet az adott termékből várhatóan eladható mennyiséget jelenti.)

a) Várhatóan hány százalékkal lesz magasabb a kereslet 5 év múlva, mint idén? (3 pont)

Az előrejelzés szerint ugyanezen alkatrész ára az elkövetkező években csökkenni fog, minden évben az előző évi ár 6%-ával.

b) Várhatóan hány év múlva lesz az alkatrész ára az ideai ár 65%-a? (5 pont)

Egy cég az előrejelzésben szereplő alkatrész eladásából szerzi meg bevételeit. A cég vezetői az elkövetkező évek bevételeinek tervezésénél abból indulnak ki, hogy a fentiek szerint a kereslet évente 6%-kal növekszik, az ár pedig évente 6%-kal csökken.

c) Várhatóan hány százalékkal lesz alacsonyabb az éves bevétel 8 év múlva, mint idén? (5 pont)

A kérdéses alkatrész egy forgáskúp alakú tömör test. A test alapkörének sugara 3 cm, alkotója 6 cm hosszú.

d) Számítsa ki a test térfogatát! (4 pont)

27) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)! (2 pont)

A)  $\sqrt{(-5)^2} = 5$

B) Minden  $x \in \mathbb{R}$  esetén  $\sqrt{x^2} = x$ .

C)  $2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{32}$

28) Egy 2014 végén készült előrejelzés szerint az Indiában élő tigrisek  $t$  száma az elkövetkezendő években (az egyes évek végén) megközelítőleg a következő összefüggés szerint alakul:  $t(x) = 3600 \cdot 0,854^x$ , ahol  $x$  a 2014 óta eltelt évek számát jelöli.

a) Számítsa ki, hogy az előrejelzés alapján 2016 végére hány százalékkal csökken a tigrisek száma a 2014-es év végi adathoz képest! (4 pont)

b) Melyik évben várható, hogy a tigrisek száma 900 alá csökken? (4 pont)

Egy állatkert a tigrisek fennmaradása érdekében tenyésztő programba kezd. Beszereznek 4 hím és 5 nőstény kölyöktigris, melyeket egy kisebb és egy nagyobb kifutóban kívánnak elhelyezni a következő szabályok mindegyikének betartásával:

I) háromnál kevesebb tigris egyik kifutóban sem lehet;

II) a nagyobb kifutóba több tigris kerül, mint a kisebbikbe;

III) mindkét kifutóban hím és nőstény tigris is el kell helyezni;

IV) egyik kifutóban sem lehet több hím, mint nőstény tigris.

c) Hányféleképpen helyezhetik el a 9 tigris a két kifutóban? (8 pont)

(A tigriseket megkülönböztetjük egymástól, és két elhelyezést eltérőnek tekintünk, ha van olyan tigris, amelyik az egyik elhelyezésben más kifutóban van, mint a másik helyezésben.)

29) Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán! Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg!

$$2^x = 10$$

(2 pont)

30) A mobiltelefonok 1990 végén jelentek meg Magyarországon. Az előfizetések száma gyorsan nőtt: 2002 végén már kb. 7 millió, 2008 végén pedig kb. 12 millió előfizetés volt az országban.

a) Hány százalékkal nőtt a mobiltelefon előfizetések száma 2002 végétől 2008 végéig? (2 pont)

1993 és 2001 között az egyes évek végén nyilvántartott mobiltelefon-előfizetések számát – ezer darabban – jó közelítéssel a következő függvény adja meg:  $f(x) = 51 \cdot 1,667^x$ , ahol  $x$  az 1992 vége óta eltelt évek számát jelöli.

b) A függvény alapján hány mobiltelefon-előfizető lehetett 2000 végén? (3 pont)

A kezdeti időszakban a mobilhálózatból indított hívások száma is gyors növekedést mutatott. 1991 januárjában Magyarországon körülbelül 350 000 mobilhívást indítottak, majd ettől a hónaptól kezdve minden hónapban megközelítőleg 6,5%-kal nőtt a hívások száma az előző havi hívások számához viszonyítva (egészen 2002-ig).

c) Melyik évben volt az a hónap, amelyben az egy havi mobilhívások száma először elérte a 100 milliót? (6 pont)

A mobiltelefonok elterjedése egy idő után a vezetékestelefon-előfizetések és hívások számának csökkenését eredményezte. A vezetékestelefon-hálózatból indított hívások száma Magyarországon 2000-ben kb. 4200 millió volt, majd ez a szám évről évre kb 8%-kal csökkent.

d) Hány hívást indítottak vezetékes hálózatból 2009-ben, és összesen hány vezetékes hívás volt a 2000 elejétől 2009 végéig terjedő tízéves időszakban? (6 pont)

31) Adja meg azt az  $x$  valós számot, amelyre  $\log_2 x = -3$ . (2 pont)

32) Adja meg  $x$  értékét, ha  $5^x = (5^2 \cdot 5 \cdot 5^4)^3$ . (2 pont)