

Halmazok

- 1) Egy rejtvényújságban egymás mellett két, szinte azonos rajz található, amelyek között 23 apró eltérés van. Ezek megtalálása a feladat. Először Ádám és Tamás nézték meg figyelmesen az ábrákat: Ádám 11, Tamás 15 eltérést talált, de csak 7 olyan volt, amelyet mindketten észrevettek.
- a) Hány olyan eltérés volt, amelyet egyikük sem vett észre? (4 pont)
Közben Enikő is elkezdte számolni az eltéréseket, de ő sem találta meg az összeset. Mindössze 4 olyan volt, amelyet mind a hárman megtaláltak. Egyeztetve kiderült, hogy az Enikő által bejelöltekből hatot Ádám is, kilencet Tamás is észrevett, és örömmel látták, hogy hárman együtt az összes eltérést megtalálták.
- b) A feladat szövege alapján töltsé ki az alábbi halmazábrát arról, hogy ki hányat talált meg! (7 pont)
- c) Fogalmazza meg a következő állítás tagadását! Enikő minden eltérést megtalált. (2 pont)
- d) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy eltérést véletlenszerűen kiválasztva, azt legalább ketten megtalálták? (4 pont)
- 2) Egy középiskolába 700 tanuló jár. Közülük 10% sportol rendszeresen a két iskolai szakosztály közül legalább az egyikben. Az atlétika szakosztályban 36 tanuló sportol rendszeresen, és pontosan 22 olyan diák van, aki az atlétika és a kosárlabda szakosztály munkájában is részt vesz.
- a) Készítsen halmazábrát az iskola tanulóiról a feladat adatainak feltüntetésével! (4 pont)
- b) Hányan sportolnak a kosárlabda szakosztályban? (4 pont)
- c) Egy másik iskola sportegyesületében 50 kosaras sportol, közülük 17 atletizál is. Ebben az iskolában véletlenszerűen kiválasztunk egy kosarast. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott tanuló atletizál is? (4 pont)
- 3) Az A és a B halmazokról a következőket tudjuk: $A \cap B = \{1; 2\}$, $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$, $A \setminus B = \{5; 7\}$. Adja meg az A és a B halmaz elemeit! (4 pont)
- 4) Egy 10 tagú csoportban mindenki beszéli az angol és a német nyelv valamelyikét. Hatan beszélnek közülük németül, nyolcan angolul. Hányan beszélnek mindkét nyelvet? Válaszát indokolja számítással, vagy szemléltesse Venn-diagrammal! (3 pont)
- 5) Sorolja fel a H halmaz elemeit, ha $H = \{\text{kétjegyű négyzetszámok}\}$ (2 pont)
- 6) Egy iskola teljes tanulói létszáma 518 fő. Ők alkotják az A halmazt. Az iskola 12. C osztályának 27 tanulója alkotja a B halmazt. Mennyi az $A \cap B$ halmaz számossága? (2 pont)
- 7) Az A halmaz elemei a háromnál nagyobb egyjegyű számok, a B halmaz elemei pedig a húsznál kisebb pozitív páratlan számok. Sorolja fel az $A \cap B$ halmaz elemeit! (2 pont)
- 8) Egy fordítóiroda angol és német fordítást vállal. Az irodában 50 fordító dolgozik, akiknek 70%-a angol nyelven, 50%-a német nyelven fordít. Hány fordító dolgozik mindkét nyelven? Válaszát indokolja! (4 pont)
- 9) Sorolja fel az $A = \{1; 10; 100\}$ halmaz összes kételemű részhalmazát! (2 pont)

10) Az A és a B halmazok a számegegyenes intervallumai: $A = [-1; 5; 12]$, $B = [3; 20]$.
Adja meg az $A \cup B$ és a $B \cap A$ halmazokat! (4 pont)

11) Legyen az A halmaz a 10-nél kisebb pozitív prímszámok halmaza, B pedig a hattal osztható, harmincnál nem nagyobb pozitív egészek halmaza.
Sorolja fel az A , a B és az $A \cup B$ halmazok elemeit! (3 pont)

12) Egy középiskolába 620 tanuló jár. Az iskola diákbizottsága az iskolanapra három kiadványt jelentetett meg:

- I. Diákok Hangja
- II. Iskolaélet
- III. Miénk a sul!

Később felmérték, hogy ezeknek a kiadványoknak milyen volt az olvasottsága az iskola tanulóinak körében.

A Diákok Hangját a tanulók 25%-a, az Iskolaéletet 40%-a, a Miénk a sul! c. kiadványt pedig 45%-a olvasta. Az első két kiadványt a tanulók 10%-a, az első és harmadik kiadványt 20%-a, a másodikat és harmadikat 25%-a, mindhármát pedig 5%-a olvasta.

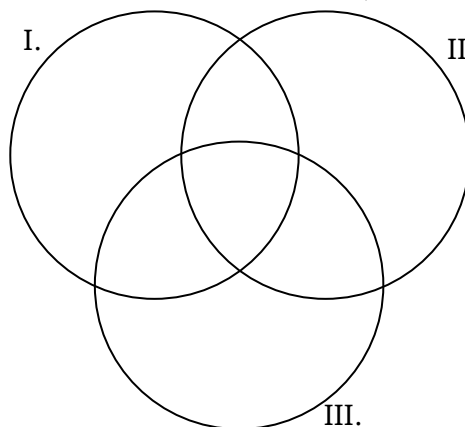
a) Hányan olvasták mindhárom kiadványt? (2 pont)

b) A halmazábra az egyes kiadványokat elolvasott tanulók létszámát szemlélteti. Írja be a halmazábra mindegyik tartományába az oda tartozó tanulók számát! (6 pont)

c) Az iskola tanulóinak hány százaléka olvasta legalább az egyik kiadványt? (2 pont)

Az iskola 12. évfolyamára 126 tanuló jár, közöttük kétszer annyi látogatta az iskolanap rendezvényeit, mint aki nem látogatta. Az Iskolaélet című kiadványt a rendezvényeket látogatók harmada, a nem látogatóknak pedig a fele olvasta. Egy újságíró megkérdez két, találmra kiválasztott diákot az évfolyamról, hogy olvasták-e az Iskolaéletet.

d) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a két megkérdezett diák közül az egyik látogatta az iskolanap rendezvényeit, a másik nem, viszont mindketten olvasták az Iskolaéletet? (7 pont)



13) Adott az A és B halmaz: $A = \{a; b; c; d\}$, $B = \{a; b; d; e; f\}$. Adja meg elemeik felsorolásával az $A \cap B$ és $A \cup B$ halmazokat! (2 pont)

14) Az A halmaz az 5-re végződő kétjegyű pozitív egészek halmaza, a B halmaz pedig a kilenccel osztható kétjegyű pozitív egészek halmaza.

Adja meg elemeik felsorolásával az alábbi halmazokat:

A ; B ; $A \cap B$; $A \setminus B$; (4 pont)

15) Jelölje \mathbb{N} a természetes számok halmazát, \mathbb{Z} az egész számok halmazát és \emptyset az üres halmazt! Adja meg az alábbi halmazműveletek eredményét!

a) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}$

b) $\mathbb{Z} \cup \emptyset$

c) $\emptyset \setminus \mathbb{N}$

(3 pont)

16) Tekintsük a következő halmazokat:

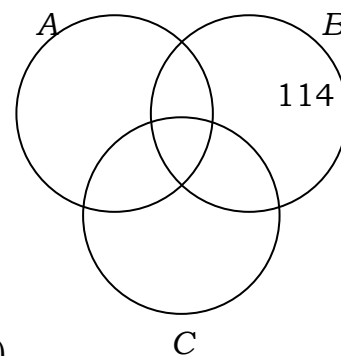
$A = \{a \text{ 100-nál nem nagyobb pozitív egész számok}\}$

$B = \{a \text{ 300-nál nem nagyobb, 3-al osztható pozitív egész számok}\}$

$A = \{a \text{ 400-nál nem nagyobb, 4-el osztható pozitív egész számok}\}$

- a) Töltse ki a táblázatot a minta alapján, majd a táblázat alapján írja be az 52, 78, 124, 216 számokat a halmazábra megfelelő tartományába! (8 pont)

	A halmaz	B halmaz	C halmaz
114	<i>nem eleme</i>	<i>eleme</i>	<i>nem eleme</i>
52			
78			
124			
216			



- b) Határozza meg az $A \cap B \cap C$ halmaz elemszámát!

(3 pont)

- c) Számítsa ki annak valószínűségét, hogy az A halmazból egy elemet véletlenszerűen kiválasztva a kiválasztott szám nem eleme sem a B , sem a C halmaznak! (6 pont)

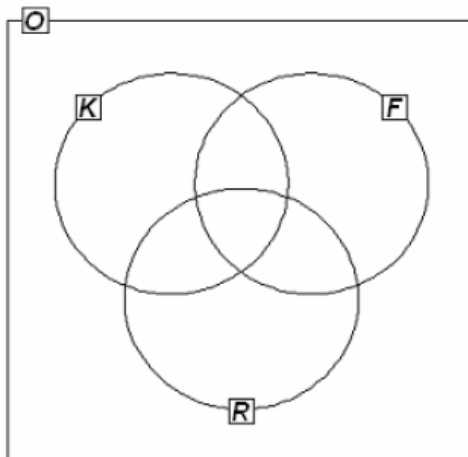
- 17) Az A és B halmazokról tudjuk, hogy $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ és $B \setminus A = \{1; 2; 4; 7\}$.

Elemeinek felsorolásával adja meg az A halmazt! (2 pont)

- 18) Az A és B halmazokról tudjuk, hogy $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $A \setminus B = \{1; 4\}$ és $A \cap B = \{2; 5\}$. Sorolja fel az A és a B halmaz elemeit! (2 pont)

- 19) Egy osztályban a következő háromféle sportkört hirdették meg: kosárlabda, foci és röplabda. Az osztály 30 tanulója közül kosárlabdára 14, focira 19, röplabdára 14 tanuló jelentkezett. Kettőn egyik sportra sem jelentkeztek. Három gyerek kosárlabdázik és focizik, de nem röplabdázik, hatan fociznak és röplabdáznak, de nem kosaraznak, kettőn pedig kosárlabdáznak és röplabdáznak, de nem fociznak. Négyen mind a háromféle sportot űzik.

- a) Írja be a megadott halmazábrába (1. ábra) a szövegnek megfelelő számokat! (4 pont)



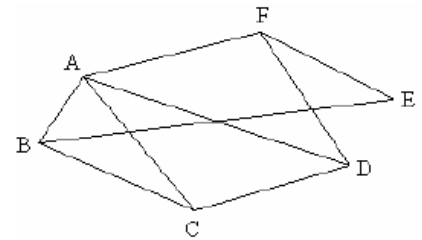
1. ábra

- b) Fogalmazza meg a következő állítás tagadását!

A focira jelentkezett tanulók közül mindenkinek van testvére. (2 pont)

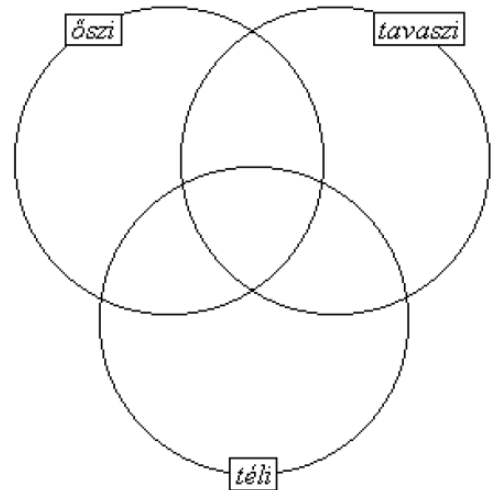
c) A focira jelentkezett 19 tanulóból öten vehetnek részt egy edzőtáborban. Igazolja, hogy több, mint 10 000-féleképpen lehet kiválasztani az öt tanulót! (3 pont)

d) Az iskolák közötti labdarúgóbajnokságra jelentkezett 6 csapat között lejátszott mérkőzéseket szemlélteti a 2. ábra. Hány mérkőzés van még hátra, ha minden csapat minden csapattal egy mérkőzést játszik a bajnokságban? (Válaszát indokolja!) (3 pont)



2. ábra

20) Egy zeneiskola minden tanulója szerepelt a tanév során szervezett három hangverseny, az őszi, a téli, a tavaszi koncert valamelyikén. 20-an voltak, akik az őszi és a téli koncerten is, 23-an, akik a télin és a tavaszin is, és 18-an, akik az őszi és a tavaszi hangversenyen is szerepeltek. 10 olyan növendék volt, aki mindhárom hangversenyen fellépett.



a) Írja be a halmazábrába a szövegben szereplő adatokat a megfelelő helyre!

(4 pont)

A zeneiskolába 188 tanuló jár. Azok közül, akik csak egy hangversenyen léptek fel, kétszer annyian szerepeltek tavasszal, mint télen, de csak negyedannyian ősszel, mint tavasszal.

b) Számítsa ki, hogy hány olyan tanuló volt, aki csak télen szerepelt! (8 pont)

c) 32 tanuló jár az A osztályba, 28 pedig a B-be. Egy ünnepélyen a két osztályból véletlenszerűen kiválasztott 10 tanulóból álló csoport képviseli az iskolát. Mennyi annak a valószínűsége, hogy mind a két osztályból pontosan 5-5 tanuló kerül a kiválasztott csoportba? (5 pont)

21) Az A halmaz elemei a (-5) -nél nagyobb, de 2 -nél kisebb egész számok. B a pozitív egész számok halmaza. Elemeinek felsorolásával adja meg az $A \setminus B$ halmazt! (2 pont)

22) Egy végzős osztály diákjai projektmunka keretében különböző statisztikai felméréseket készítettek az iskola tanulóinak körében.

a) Éva 150 diákot kérdezett meg otthonuk felszereltségéről. Felméréséből kiderült, hogy a megkérdezettek közül kétszer annyian rendelkeznek mikrohullámú sütővel, mint mosogatógéppel. Azt is megtudta, hogy 63-an mindkét géppel, 9-en egyik géppel sem rendelkeznek. A megkérdezettek hány százalékának nincs otthon mikrohullámú sütője? (6 pont)

b) Jóska a saját felmérésében 200 diákot kérdezett meg arról, hogy hány számítógépük van a háztartásban. A válaszokat a következő táblázatban összesítette:

A számítógépek száma a háztartásban	Gyakoriság
0	3
1	94
2	89
3	14

Jóska felmérése alapján töltsse ki az alábbi táblázatot az egy háztartásban található számítógépek számáról! (4 pont)

A számítógépek számának átlaga	
A számítógépek számának mediánja	
A számítógépek számának módusza	

c) Tamás a saját felmérése alapján a következőt állítja:

Minden háztartásban van televízió.

Az alábbi négy állítás közül válassza ki azt a kettőt, amely Tamás állításának tagadása!

- A) Semelyik háztartásban nincs televízió.
- B) Van olyan háztartás, ahol van televízió.
- C) Van olyan háztartás, ahol nincs televízió.
- D) Nem minden háztartásban van televízió.

(2 pont)

23) Legyen A halmaz a 8-nál nem nagyobb pozitív egész számok halmaza, B pedig a 3-mal osztható egyjegyű pozitív egész számok halmaza.

Elemjeinek felsorolásával adja meg az A , a B , az $A \cap B$ és az $A \setminus B$ halmazt!

(4 pont)

24) Egy osztályban 25-en tanulnak angolul, 17-en tanulnak németül. E két nyelv közül legalább az egyiket mindenki tanulja. Hányan tanulják mindkét nyelvet, ha az osztály létszáma 30?

(2 pont)

25) Egy közvélemény-kutató intézet azt a feladatot kapta, hogy két alkalommal – fél év különbséggel – mérje fel a TV-ben látható három filmsorozat nézettségi adatait. Az ábrán látható kérdőíven a válaszoló vagy azt jelölhette be, hogy az A , B , és C sorozatok közül melyiket nézi (akár többet is meg lehetett jelölni), vagy azt, hogy egyiket sem nézi. Az első felméréskor kapott 600 kérdőív jelöléseit összesítve megállapították, hogy az A sorozat összesen 90 jelölést kapott, a B sorozat összesen 290-et, a C sorozat pedig összesen 230-at. Érdekes módon olyan válaszadó nem volt, aki pontosan két sorozatot nézett volna, viszont 55-en mindhárom sorozatot bejelölték.

a) A válaszolók hány százaléka nézte az A sorozatot?

(2 pont)

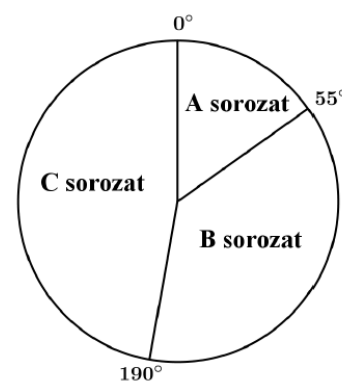
b) Hány válaszoló nem nézte egyik sorozatot sem?

(5 pont)

A második felmérés során kiválogatták azokat a kérdőíveket, amelyeken valamelyik sorozat meg volt jelölve. Ezekre a három sorozat nézettségére összesen 576 jelölés érkezett. Az adatok feldolgozói minden jelölést megszámoztak, és a végeredményről az itt látható kördiagramot készítették.

c) Számítsa ki, hogy az egyes sorozatok nézettségére hány jelölés érkezett!

(5 pont)



26) A biológiaérettségi egyik tesztkérdésénél a megadott öt válaszlehetőség közül a két jót kell megjelölni.

a) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy az öt lehetőség közül kettőt véletlenszerűen kiválasztva a két jó választ találjuk el! (3 pont)

Nóri, Judit és Gergő egy 58 kérdésből álló biológiateszttel mérik fel tudásukat az érettségi előtt. A kitöltés után, a helyes válaszokat megnézve az derült ki, hogy Nóri 32, Judit 38 kérdést válaszolt meg helyesen, és 21 olyan kérdés

volt, amelyre mindketten jó választ adtak. Megállapították azt is, hogy 11 kérdésre mindhárman helyesen válaszoltak, és Gergő helyesen megoldott feladati közül 17-et Nóri is, 19-et Judit is jól oldott meg. Volt viszont 4 olyan kérdés, amelyet egyikük sem tudott jól megválaszolni.

b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy egy kérdést véletlenszerűen kiválasztva, arra Gergő helyes választ adott! Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg! (8 pont)

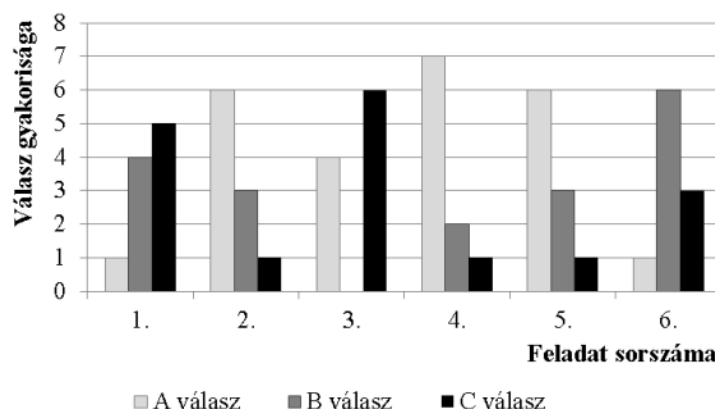
Nóri a biológia és kémia szóbeli érettségire készül. Biológiából 28, kémiából 30 tételt kell megtanulnia. Az első napra mindkét tárgyból 3-3 tételt szeretne kiválasztani, majd a kiválasztott tételeket sorba állítani úgy, hogy a két tantárgy tételei felváltva kövessék egymást.

c) Számítsa ki, hányféleképpen állíthatja össze Nóri az első napra szóló tanulási programját! (6 pont)

27) Az A halmaz elemei a 28 pozitív osztói, a B halmaz elemei a 49 pozitív osztói. Adja meg az $A \cap B$ és a $B \setminus A$ halmazokat elemeik felsorolásával! Megoldását részletezze! (3 pont)

28) Tekintsük a következő két halmazt: $G = \{1;2;3;4;6;12\}$ és $H = \{1;2;4;8;16\}$. Elemeik felsorolásával adja meg a $G \cap H$ és a $H \setminus G$ halmazokat! (2 pont)

29) Egy hat kérdéses tesztben minden kérdésnél a megadott három lehetőség (A, B és C) közül kellett választani a helyes választ. A tesztet tíz diák írta meg. Az alábbi diagram az egyes feladatokra adott választok eloszlását mutatja.



A teszt értékelésekor minden helyes válaszra 1 pont, helytelen válaszra pedig 0 pont jár. Tudjuk, hogy a tíz diák összesen 35 pontot szerzett.

a) Határozza meg az összes jó és az összes rossz válasz számát, és készítsen ezekről kördiagramot! (4 pont)

b) Igaz-e, hogy minden kérdésre az a jó válasz, amit a legtöbben jelöltek be? Válaszát indokolja! (3 pont)

Éva, János és Nóra is megírták ezt a tesztet. Egyetlen olyan kérdés volt, amelyre mindhárman jól válaszoltak. Három olyan kérdés volt, amit Éva és János is jól válaszolt meg, kettő olyan, amire János és Nóra is, és egy olyan, amire Nóra és Éva is jó választ adott. Két olyan kérdés volt, amelyet csak egyvalaki oldott meg helyesen hármuk közül.

c) Hány pontot szereztek ők hárman összesen ezen a teszten? (5 pont)

Az egyik diák nem készült fel a tesztre, válaszait tippelve, véletlenszerűen adja meg.

d) Mekkora valószínűséggel lesz legalább egy jó válasza a tesztben? (5 pont)

- 30) Az A halmaz elemei a 12 pozitív osztói. A B elemei a 15-nél kisebb (pozitív) prímszámok. Adja meg elemei felsorolásával az A , a B és az $A \setminus B$ halmazt!
(3 pont)
- 31) Egy matematikaversenyen 25 feladatot kell a résztvevőknek megoldaniuk 75 perc alatt. A felkészülés során Vera azt tervezgeti, hogy mennyi időt töltsön majd a könnyebb feladatok megoldásával, és mennyi időt hagyjon a nehezebbekre. Az első feladatra 1 percet szán. A versenyfeladatok általában egyre nehezedő sorrendben vannak megadva; Vera ezt úgy veszi figyelembe a tervezésnél, hogy a második feladattól kezdve mindig ugyanannyival növeli az egyes feladatok megoldására fordítható időt. Vera a rendelkezésére álló teljes időtartamot szeretné kitölteni a feladatok megoldásával.
- a) A terv szerint összesen mennyi időt szán Vera az utolsó 4 feladat megoldására?
(7 pont)
- A versenyzőknek minden feladat megoldása után öt lehetséges válasz közül kell az egyetlen helyes választ kiválasztaniuk. Egy versenyző pontszámának kiszámítása a $4 \cdot H - R + F$ képlettel történik, ahol H a helyes válaszok, R a rossz feladatok, F pedig a kitűzött feladatok számát jelenti (a kihagyott feladatokra 0 pont jár). Vera a 25 kitűzött feladat közül 3-at hagyott ki, és összesen 93 pontot szerzett.
- b) Hány helyes választ adott Vera?
(5 pont)
- Vera osztályából összesen 11-en indultak a versenyen. Közülük ugyanannyian oldották meg a 24-es, mint a 25-ös feladatot. Sőt ugyanennyien voltak azok is, akik a két feladat egyikét sem oldották meg. Egy olyan versenyző volt az osztályban, aki a 24-es és a 25-ös feladatot is megoldotta.
- c) Hányan voltak az osztályban azok, akik a 24-es feladatot megoldották, de a 25-ös feladatot nem?
(5 pont)
- 32) Egy 20 fős társaság tagjait az április havi szabadidős tevékenységeikről kérdezték. Mindenki három eldöntendő kérdésre válaszolt (igennel vagy nemmel).
- I. Volt-e moziban?
II. Olvasott-e szépirodalmi könyvet?
III. Volt-e koncerten?
- A válaszokból kiderült, hogy tizenketten voltak moziban, kilencen olvastak szépirodalmi könyvet, és négy fő járt koncerten. Öten voltak, akik moziban jártak és szépirodalmi könyvet is olvastak, négyen pedig moziban és koncerten is jártak. Hárman mindhárom kérdésre igennel válaszoltak.
- a) Hány olyan tagja van a társaságnak, aki mindhárom kérdésre nemmel válaszolt?
(6 pont)
- A társaság 20 tagja közül véletlenszerűen kiválasztunk kettőt.
- b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy legalább egyikük volt moziban április folyamán!
(5 pont)
- Attól a kilenc személytől, akik olvastak áprilisban szépirodalmi könyvet, azt is megkérdezték, hogy hány könyvet olvastak el a hónapban. A válaszok (pozitív egész számok) elemzése után kiderült, hogy a kilenc szám (egyetlen) módusza 1, mediánja 2, átlaga $\frac{16}{9}$, terjedelme pedig 2.
- c) Adja meg ezt a kilenc számot!
(6 pont)

- 33) Egy 27 fős osztályban mindenki tesz érettségi vizsgát angolból vagy németből. 23 diák vizsgázik angolból, 12 diák pedig németből. Hány olyan diák van az osztályban, aki angolból és németből is tesz érettségi vizsgát? (2 pont)